e3a concours

Concours ESTP - ENSAM - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de MATHEMATIQUES 2

Filière PC

durée 3 heures

Nota: les cinq sujets sont indépendants et peuvent être traités, à la rigueur, dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très distinctement *leur numéro. Leur 5ème question est, en général, la plus difficile.*
Dans la rédaction des copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés.*

SUJET 1 Soit $f(x) = \exp(-\sqrt{x})$, x réel >0 . La dérivée $n^{ème}$ de f est notée $f^{(n)}(x)$, ou $\frac{d^n f}{dx^n}$, ou $D^n f$.

1 Dresser un tableau de variations de f, et dessiner sa courbe représentative .

2 On pose $c_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$. Calculer c_1 et c_2 .

3 Établir que $y = f(x)$ obéit à l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.

Préciser des fractions rationnelles $\varphi(n)$ et $\psi(n)$, telles que $c_{n+2} = \varphi(n)c_{n+1} + \psi(n)c_n$.

4 Démontrer que $|c_n| \leq 1$. Qu'en déduit-on pour le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$?

5 Prouver que $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n (x-1)^n$ sur un intervalle J ouvert que l'on précisera.

SUJET 2 On s'intéresse à la série de terme général $u_n = \frac{j^n}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, où $j = \exp(2i\frac{\pi}{3})$ est racine cubique de l'unité. On introduit $v_n = u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$, et les sommes partielles $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_p = \sum_{\ell=1}^{p} v_\ell$.

1 Montrer que $|v_n| \sim C.n^{-3/2}$ où C est une constante à déterminer.

2 Montrer que l'une des deux suites (U_n) et (V_p) est ***"extraite"*** de l'autre. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

3 On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer l'intégrale impropre $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

4 Établir que le reste $R_n = \sum_{q=n+1}^{+\infty} u_q$ vaut $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{(je^{-t})^{n+1} dt}{\sqrt{t}(1-je^{-t})}$. [On peut exprimer u_q au moyen de a_q .]

5 En déduire que $|R_n| \sim D.|u_n|$ où D est une constante à déterminer.

SUJET 3

Soit f la fonction de la variable réelle x telle que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1 Préciser l'ensemble de définition $\mathscr{E}$ de f.

2 Montrer que cette fonction est ***strictement*** décroissante .

3 Déterminer la limite de f pour x tendant vers $+\infty$.

4 Prouver que $f(x) \sim \frac{2}{x^2}$ pour x tendant vers 0 . [On peut comparer f à une intégrale.]

5 Soit $J = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Démontrer que J ***existe*** et que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

SUJET 4

On définit f, fonction ***paire*** de période 2π, par $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0;\pi]$.

1 Cette fonction est-elle C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$?

2 On cherche la série de Fourier de f , soit $a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$. Calculer a_0 et b_n.

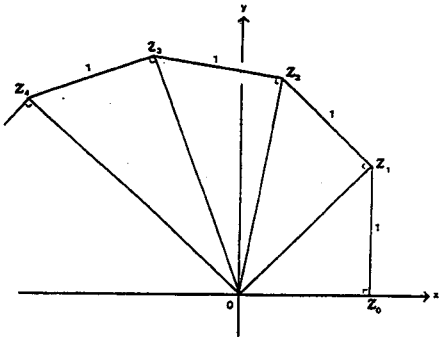
3 On pose $G(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt$. Établir que $G(x) = \frac{1-\cos(x^2)}{2x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\,dt$. En déduire l'existence de $L = \lim_{+\infty} G(x)$. On admettra que $L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4 Déterminer alors une constante D telle que $a_n \sim D.n^{-3/2}$.

5 Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

SUJET 5

Dans le plan complexe $\mathbb{C}$, on définit la suite de points (z_n) de la façon suivante : $z_0 = 1$, et le triangle Oz_nz_{n+1} , ***rectangle*** en z_n , est orienté dans le ***sens direct***, avec $|z_{n+1} - z_n| = 1$ [figure ci-contre]. La réunion des segments $[z_n, z_{n+1}]$ constitue donc une ligne polygonale infinie L de forme spirale.



1 Calculer $|z_n|$.

2 Montrer que le nombre réel $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\frac{1}{\sqrt{k}}$ est un argument possible pour le nombre complexe z_n , $n \geq 1$.

3 Déterminer la ***nature*** de la série de terme général $u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \text{Arctan}\left(n^{-1/2}\right)$.

4 Établir l'***existence*** d'une constante réelle C , telle que $\alpha_n = 2\sqrt{n} - C + O\left(n^{-1/2}\right)$.

5 Montrer que cette constante C est ***strictement positive***.